Correction du TD 3 - Automatique

Exercice 1

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} - 3y(t) = \frac{du(t)}{dt} - u(t).$$

1. Donner une représentation d'état du système.

➢ Solution 1

En choisissant comme variables d'état :

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y} - u$$

on obtient la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

➢ Solution 2 (en utilisant le schéma bloc)

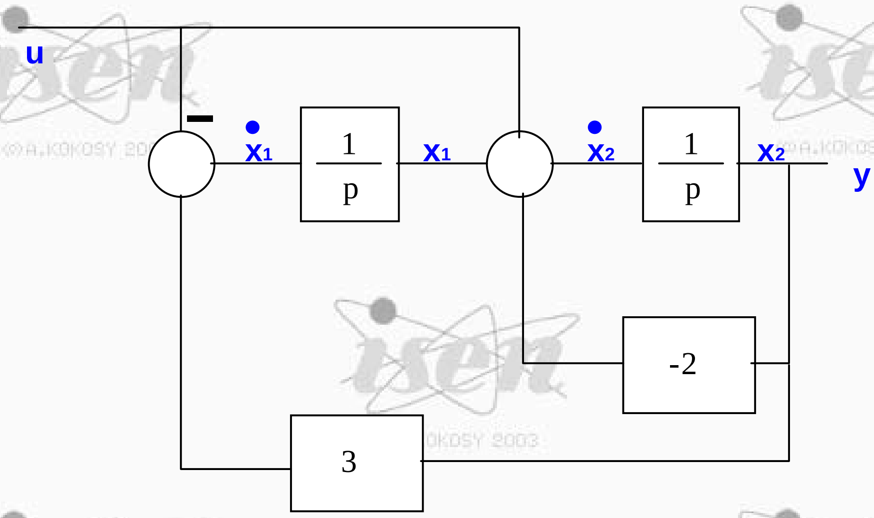
On prend la transformée de Laplace de l'équation différentielle.

$$p^2 y(p) + 2py(p) - 3y(p) = pu(p) - u(p)$$

On met en forme l'équation de sorte à faire apparaître 1/p. (Ici on divise par p^2)

$$y(p) = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p}(3y(p) - u(p)) + (-2y(p) + u(p))\right)$$

On dessine le schéma bloc :



Vecteur d'état : $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

D'après le schéma bloc on a :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2 - u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + u \end{cases}$$

ou en forme matricielle :

$$\begin{cases} \dot{\mathrm{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \mathrm{x} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \mathrm{x} \end{cases}$$

2. Etudier la stabilité du système

Polynôme caractéristique : $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3$

→ Racines : 1 et -3

1 est à partie réelle positive par conséquent **le système est instable**.

3. Mettre le système sous forme diagonale. Conclure sur la commandabilité et l'observabilité?

- Solution 1

Matrice de passage :

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},\ \mathrm{M}^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Dans la nouvelle base on a :

$$\tilde{\mathrm{A}} = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{AM} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ \tilde{\mathrm{B}} = \mathrm{M}^{-1}\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \tilde{\mathrm{C}} = \mathrm{CM} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

L'équation d'état dans la nouvelle base s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathrm{x}}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\mathrm{x}} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{u} \\ \mathrm{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \tilde{\mathrm{x}} \end{cases}$$

A partir de l'équation d'état sous forme diagonale on peut directement déduire la commandabilité et l'observabilité des variables d'états du vecteur $\tilde{x}$.

Commandabilité : on a $\tilde{x}_1$ commandable et $\tilde{x}_2$ non commandable

Observabilité : on a $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_2$ observable.

Remarque : Cependant on ne peut rien conclure sur x_1 et x_2.

➢ Solution 2

Matrice de passage :

$$M=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix},\; M^{-1}=\begin{bmatrix}1/4 & 1/4\\ 1/4 & -3/4\end{bmatrix}$$

Dans la nouvelle base on a :

$$\tilde{A}=M^{-1}AM=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix},\; \tilde{B}=M^{-1}B=\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix},\; \tilde{C}=CM=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}$$

L'équation d'état dans la nouvelle base s'écrit :

$$\begin{cases}\dot{\tilde{x}}(t)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}\tilde{x}(t)+\begin{bmatrix}0\\ -1\end{bmatrix}u(t)\\ y(t)=\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}\tilde{x}(t)\end{cases}$$

A partir de l'équation d'état sous forme diagonale on peut directement déduire la commandabilité et l'observabilité des variables d'états du vecteur $\tilde{x}$.

Commandabilité : on a $\tilde{x}_1$ non commandable et $\tilde{x}_2$ commandable

Observabilité : on a $\tilde{x}_1$ et $\tilde{x}_2$ observable.

Remarque : Cependant on ne peut rien conclure sur x_1 et x_2.

4. Déterminer la sortie y(t) pour une entrée en échelon unitaire.

La solution y(t) de l'équation d'état est donnée par :

$$y(t)=Ce^{A(t-t_0)}x(t_0)+c\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}u(\tau)d\tau+Du(t)$$

Ici on a : $t_0=0$

On commence par déterminer la matrice de transition e^{At}

On utilise la forme diagonale de A.

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix} \text{ et on a } e^{\tilde{A}t}=\begin{bmatrix}e^{t} & 0\\ 0 & e^{-3t}\end{bmatrix}$$

On calcule : $e^{At}=Me^{\tilde{A}t}M^{-1}$ $e^{At}=Me^{\tilde{A}t}M^{-1}$

$$e^{At} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}e^{t} + \frac{1}{4}e^{-3t} & \frac{3}{4}e^{t} - \frac{3}{4}e^{-3t} \\ \frac{1}{4}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-3t} & \frac{1}{4}e^{t} + \frac{3}{4}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

La solution de l'équation d'état est :

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-3t} & \frac{1}{4}e^{t} + \frac{3}{4}e^{-3t} \end{bmatrix} x(0) + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-3t}$$

5. **Mettre le système sous forme compagne horizontale. Commenter le résultat obtenu.**

On forme la matrice $\tilde{A}$ qui a une forme particulière :

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ et } \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

On calcule la matrice de passage :

$$M = [AB + a_1 B \quad B] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

M n'est pas inversible : on ne peut déterminer $\tilde{B}$.

Remarque : La forme compagne horizontale (qui est une forme de commandabilité) n'existe pas car le système n'est pas commandable.

6. **Calculer la fonction de transfert. Etudier la stabilité**

$$\mathrm{H(s)} = \frac{1}{s+3}$$

Le système entrée - sortie est stable.

Exercice 2

1. **Donner une représentation d'état du système sous forme matricielle.**

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} e \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x \end{cases}$$

2. **Etudier la stabilité du système en fonction du paramètre k.**

$p(s) = |sI - A| = \begin{vmatrix} s & -1 \\ k & s+1 \end{vmatrix} = s^2 + s + k$ → le système est stable si k>0.

3. **Mettre la représentation d'état sous forme compagne verticale. On précisera la matrice de passage M.**

On calcule la matrice de passage M :

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} C \\ CA + Ca_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

d'où on obtient :

$$\tilde{A} = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 \\ -a_0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix}, \; \tilde{B} = M^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}, \; \tilde{C} = CM = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Le modèle d'état dans la nouvelle base est donc :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -k & 0 \end{bmatrix}\tilde{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}u \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\tilde{x} \end{cases}$$

4. **On soumet le système à un échelon unité. A partir de l'équation d'état, déterminer la valeur de la sortie en régime permanent.**

En régime permanent $\dot{x} = 0$:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k & -1 \end{bmatrix}x + \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix}e \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ y = x_1 = e = 1 \end{cases}$$